**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA**
**DIPARTIMENTO DI MATEMATICA**
**DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA**
**Anno Accademico 2002-2003**

*Francesco Uguzzoni*

# SOLUZIONE FONDAMENTALE PER UNA CLASSE DI OPERATORI IN FORMA DI NON-DIVERGENZA SU GRUPPI STRATIFICATI

8 aprile 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

**Abstract.** We construct the fundamental solutions for the operators in non-divergence form $\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t)\, X_i X_j - \partial_t$ and $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\, X_i X_j$ where the $X_i$'s form a stratified system of Hörmander vector fields and $a_{i,j}$ are Hölder continuous functions belonging to a suitable class of ellipticity.

**Sunto.** Costruiamo la soluzione fondamentale per gli operatori in forma di non-divergenza $\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t)\, X_i X_j - \partial_t$ e $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\, X_i X_j$ dove i campi vettoriali $X_i$ sono un sistema di generatori di un gruppo stratificato e le $a_{i,j}$ sono funzioni Hölderiane in un'opportuna classe di ellitticità.

# SOLUZIONE FONDAMENTALE PER UNA CLASSE DI OPERATORI IN FORMA DI NON-DIVERGENZA SU GRUPPI STRATIFICATI

FRANCESCO UGUZZONI

*Risultati ottenuti in collaborazione con A. Bonfiglioli ed E. Lanconelli*

## 1. Introduzione

Sia $\mathbb{G}$ un gruppo stratificato, cioè sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, tale che la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_r$, dove $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_i] = \mathfrak{G}_{i+1}$, $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_r] = \{0\}$. Se $\{X_1, \ldots, X_m\}$ è una base di $\mathfrak{G}_1$, chiamiamo $\sum_{i=1}^m X_i^2$ un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Molte equazioni del secondo ordine lineari e non lineari di tipo sub-ellittico provenienti dalla teoria geometrica delle più variabili complesse, da problemi di curvatura su varietà CR, dalla geometria sub-Riemanniana , da processi di diffusione, dalla teoria del controllo, da problemi di ricostruzione di immagini (si vedano ad esempio [10, 15, 18, 21, 22, 25, 26]) hanno una struttura algebrica soggiacente su gruppi stratificati $\mathbb{G}$.

In questo seminario costruiamo la soluzione fondamentale per l'operatore lineare di tipo parabolico in forma di *non-divergenza* su $\mathbb{G} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{N+1}$

$$\mathcal{H} = \textstyle\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t)\, X_i X_j - \partial_t \qquad (x \in \mathbb{G},\ t \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

dove gli $X_i$ sono come sopra e le $a_{i,j}$ sono funzioni Hölderiane appartenenti ad una opportuna classe di ellitticità. Analogamente, studiamo la soluzione fondamentale per l'operatore lineare in forma di *non-divergenza*

$$\mathcal{L} = \textstyle\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\, X_i X_j.$$

Operatori come $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}$ intervengono in modo naturale come linearizzazioni di equazioni sub-ellittiche nonlineari. La forma di non-divergenza di $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}$ è una richiesta cruciale per molte applicazioni ad equazioni nonlineari.

Vari risultati per operatori in forma di divergenza $-\sum_{i,j} X_i^*(a_{i,j} X_j)$ sono presenti in letteratura, sia per equazioni lineari che quasi-lineari. Disuguaglianze di Harnack, risultati di regolarità, esistenza e stime delle funzioni di Green possono essere trovati ad esempio in [6, 7, 9, 12, 19, 27]. Al contrario sono pochi i lavori dedicati a operatori in forma di non-divergenza. Possiamo solo citare Bramanti&Brandolini [5] e il recente lavoro di Capogna&Han [8], dove vengono provate stime a priori in $L^p$ e in spazi Hölderiani, rispettivamente.

Qui costruiamo la soluzione fondamentale $\Gamma$ per $\mathcal{H}$ attraverso il ben noto metodo della parametrice di Levi, mentre la soluzione fondamentale $\gamma$ per $\mathcal{L}$ e' ottenuta con un argomento di saturazione della variabile $t$. Osserviamo esplicitamente che varie difficoltà nuove si presentano nell'adattare tale metodo al nostro contesto. La maggiore di queste difficoltà consiste nell'ottenere opportune stime *uniformi* per i corrispondenti operatori congelati (si veda (1.4)). La derivazione di tali stime e' delineata nel paragrafo 2: facciamo uso di un procedimento di lifting a gruppi

stratificati liberi e di una accurata analisi dell'equivalenza (attraverso automorfismi ben stimati) di tutti i sub-Laplaciani su tali gruppi liberi stratificati.

Integrando $\Gamma$ nella variabile temporale $t$, siamo poi in grado di costruire anche una soluzione fondamentale locale $\gamma$ di $\mathcal{L}$. Questo può essere fatto una volta ottenute opportune stime per *tempi grandi* di $\Gamma$. Sottolineiamo che, mentre stime ottimali di $\Gamma$ e delle sue derivate per tempi piccoli possono essere ricavate direttamente dalla costruzione di $\Gamma$, il problema delle stime per tempi grandi è molto più delicato. Siamo in grado di ottenere tali stime modificando opportunamente i coefficienti $a_{i,j}$ fuori da un compatto (si veda il Lemma 3.3).

Enunciamo ora i nostri risultati principali (si veda più sotto per le notazioni). Per le prove complete facciamo riferimento a [2].

**Teorema 1.1.** *supponiamo che i coefficienti $a_{i,j}$ di $\mathcal{H}$ stiano nella classe di ellitticità $\mathcal{M}_\Lambda$ e nello spazio Hölderiano $\Gamma^\alpha(\mathbb{R}^{N+1})$. Allora esiste una soluzione fondamentale $\Gamma$ per $\mathcal{H}$, con le seguenti proprietà.*

(i) *$\Gamma$ è una funziona continua fuori dalla diagonale di $\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$. Inoltre, per ogni fissato $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\Gamma(\cdot;\zeta) \in \Gamma^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\zeta\})$ e abbiamo $\mathcal{H}(\Gamma(\cdot;\zeta)) = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\zeta\}$.*

(ii) *$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = 0$ per $t \le \tau$. Inoltre, esiste una costante positiva $M$ e, per ogni $T > 0$, esiste una costante positiva $c(T)$ tale che, per $0 < t - \tau \le T$, valgono le seguenti stime*

(1.2)
$$0 \le \Gamma(x,t;\xi,\tau) \le c(T)\,(t-\tau)^{-Q/2} \exp\Big(-\frac{d^2(x,\xi)}{M\,(t-\tau)}\Big),$$
$$\big|X_i(\Gamma(\cdot;\xi,\tau))(x,t)\big| \le c(T)\,(t-\tau)^{-(Q+1)/2} \exp\Big(-\frac{d^2(x,\xi)}{M\,(t-\tau)}\Big),$$
$$\big|X_iX_j(\Gamma(\cdot;\xi,\tau))(x,t)\big|,\ \big|\partial_t(\Gamma(\cdot;\xi,\tau))(x,t)\big| \le c(T)\,(t-\tau)^{-(Q+2)/2} \exp\Big(-\frac{d^2(x,\xi)}{M\,(t-\tau)}\Big).$$

(iii) *per ogni $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, la convoluzione $w(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z;\zeta)\,\psi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ sta nella classe $\Gamma^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ e abbiamo $\mathcal{H}w = -\psi$ in $\mathbb{R}^{N+1}$.*

(iv) *Siano $\mu \ge 0$ e $T_2 > T_1$ tali che $(T_2 - T_1)\mu$ è sufficientemente piccolo. Allora, per ogni $f \in \Gamma^\beta(\mathbb{R}^N \times [T_1,T_2])$ (dove $0 < \beta \le \alpha$) e $g \in C(\mathbb{R}^N)$ soddisfacente la condizione di crescita $|f(x,t)|, |g(x)| \le c\exp(\mu\, d^2(x))$ per qualche costante $c > 0$, la funzione (definita per $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (T_1,T_2]$)*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,T_1)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}^N\times[T_1,t]} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau,$$

*sta nella classe $\Gamma^{2+\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N\times(T_1,T_2)) \cap C(\mathbb{R}^N\times[T_1,T_2])$. Inoltre, $u$ è soluzione del problema di Cauchy $\mathcal{H}u = -f$ in $\mathbb{R}^N \times (T_1,T_2)$, $u(\cdot,T_1) = g$.*

**Teorema 1.2.** *Supponiamo che la dimensione $m$ di $\mathfrak{G}_1$ sia più grande di due. Supponiamo poi che i coefficienti $a_{i,j}$ di $\mathcal{L}$ siano nello spazio Hölderiano $\Gamma^\alpha(\mathbb{R}^N)$ e nella classe di ellitticità $\mathcal{M}_\Lambda$. Per ogni fissato sottinsieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, esiste una soluzione fondamentale $\gamma$ per $\mathcal{L}$ in $\Omega$, con le seguenti proprietà.*

(i) *$\gamma$ è una funziona continua fuori dalla diagonale di*

$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. *Inoltre, per ogni fissato* $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\gamma(\cdot,\xi) \in \Gamma^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\})$, *e abbiamo* $\mathcal{L}(\gamma(\cdot,\xi)) = 0$ *in* $\Omega \setminus \{\xi\}$.

(ii) *Per ogni compatto* $K \Subset \mathbb{R}^N$, *esiste una costante positiva* $c$ *tale che*

$$0 \le \gamma(x,\xi) \le c\,(1 + d(x,\xi)^{2-Q}), \quad \xi \in K,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) *Per ogni* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, *la convoluzione* $w(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x;\xi)\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ *sta nella classe* $\Gamma^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *e abbiamo* $\mathcal{L}w = -\psi$ *in* $\Omega$.

Nei teoremi sopra, abbiamo denotato con $Q = \sum_{j=1}^r j \dim(\mathfrak{G}_j)$ la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$, e con $d$ una fissata norma omogenea su $\mathbb{G}$ e abbiamo posto $d(x,y) = d(y^{-1} \circ x)$. Inoltre, dato $\Lambda > 1$, abbiamo denotato con $\mathcal{M}_\Lambda$ la classe di ellitticità dellematrici simmetriche $m \times m$ $A$ tali che $\Lambda^{-1}|\xi|^2 \le \langle A\xi,\xi\rangle \le \Lambda|\xi|^2$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^m$. Infine abbiamo indicato con $\Gamma^\beta$, $\Gamma^{2+\beta}$ gli appropriati spazi Hölderiani sub-ellittici.

Come è noto, il metodo della parametrice di Levi richiede la conoscenza di molte buone proprietà degli operatori congelati

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{L}_A - \partial_t = \textstyle\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\, X_i X_j - \partial_t, \tag{1.3}$$

dove $A = (a_{i,j})_{i,j}$ è una fissata matrice costante in $\mathcal{M}_\Lambda$. Ad esempio uno strumento essenziale è dato dalle seguenti *stime Gaussiane uniformi* per le soluzioni fondamentali $\Gamma_A$ di $\mathcal{H}_A$:

$$\begin{aligned} &\left|X_{i_1}\cdots X_{i_p}(\partial_t)^q\,\Gamma_A(x,t) - X_{i_1}\cdots X_{i_p}(\partial_t)^q\,\Gamma_B(x,t)\right| \le \\ &\qquad\qquad c_{\Lambda,p,q}\,\|A-B\|^{1/r}\,t^{-(Q+p+2q)/2}\exp\Big(-\frac{d^2(x)}{c_\Lambda\,t}\Big), \end{aligned} \tag{1.4}$$

per ogni $A$, $B \in \mathcal{M}_\Lambda$ (qui, $\|A\|$ denota la norma matriciale $\max_{|\xi|=1}|A\xi|$). Stime Gaussiane , ma non uniformi, per nuclei del calore su gruppi di Lie sono state provate da Jerison&Sànchez-Calle [16], da Kusuoka&Stroock [17] e da Varopoulos&Saloff-Coste&Coulhon [26]. Stime uniformi, ma non Gaussiane, per famiglie di operatori di Hörmander generalizzanti (1.1), sono state provate da Rothschild&Stein [24] e da Bramanti&Brandolini [5].

Poichè la derivazione delle stime Gaussiane uniformi è non banale ed è un punto chiave nella prova dei nostri risultati principali, nel paragrafo 2 spieghiamo brevemente come (1.4) possono essere ricavate con un approccio diretto. Nel paragrafo 3, diamo una traccia della prova del Teorema 1.1, descrivendo il nostro adattamento del metodo della parametrice e come intervengono le stime uniformi. Infine, diamo una traccia di come le stime per tempi grandi sono usate per provare il Teorema 1.2 usando sia un argomento di saturazione che un argomento di approssimazione. Chiudiamo l'introduzione segnalando che il metodo della parametrice è stato recentemente utilizzato da Polidoro in [23] per costruire la soluzione fondamentale per una classe di operatori ultraparabolici di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck.

## 2. Stime uniformi

Se il gruppo stratificato fosse $(\mathbb{R}^N,+)$ la soluzione fondamentale di un operatore $\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}\,\partial_i\partial_j - \partial_t$ (con $A = (a_{i,j})_{i,j}$ matrice costante definita positiva), sarebbe data dalla composizione della soluzione fondamentale di $\sum_{i=1}^N (\partial_i)^2 - \partial_t$ su $\mathbb{R}^{N+1}$ con un cambiamento di coordinate lineare dato da $A^{-1/2}$.

Ci chiediamo se qualcosa di simile è vero per generali gruppi stratificati $\mathbb{G}$.

Più precisamente ci chiediamo se ogni sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$ si possa mettere (via un diffeomorfismo) in una fissata forma canonica. Osserviamo anzitutto che, se $A = (a_{i,j})_{i,j \le m}$ è simmetrica definita positiva, allora $\mathcal{L}_A = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j} X_i X_j$ si può riscrivere come $\sum_{i=1}^m Y_i^2$, dove $Y_i = \sum_{j=1}^m (A^{1/2})_{i,j} X_j$. Ci chiediamo quindi se esiste un diffeomorfismo $T_A : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ tale che (nel nuovo sistema di coordinate dato da $T_A$) il campo vettoriale $Y_i$ è mandato nel (fissato) campo vettoriale invariante a sinistra $Z_i$ che coincide nell'origine con$\partial_i$. In questo modo, se poniamo $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^m Z_i^2$ il sub-Laplaciano $\sum_{i=1}^m Y_i^2$ è mandato in $\Delta_{\mathbb{G}}$, i.e.,

$$\mathcal{L}_A(u \circ T_A) = (\Delta_{\mathbb{G}} u) \circ T_A, \quad \text{per ogni } u \in C^\infty(\mathbb{G}). \tag{2.1}$$

$T_A$ in generale può non esistere, e se esiste può non essere lineare (si veda [4]). Se però $\mathbb{G}$ è un *gruppo stratificato libero* (i.e., la sua algebra di Lie è un algebra di Lie libera nilpotente) allora esiste un automorfismo $T_A$ di $\mathbb{G}$ che verifica (2.1).

Di conseguenza, nel caso libero, la soluzione fondamentale $\Gamma_A$ per $\mathcal{H}_A = \mathcal{L}_A - \partial_t$ si ottiene componendo $T_A$ con la soluzione fondamentale $\Gamma_{\mathbb{G}}$ per il *fissato* operatore $\Delta_{\mathbb{G}} - \partial_t$:

$$\Gamma_A(x,t;\xi,\tau) = |\det \mathcal{J}_{T_A}(x)|\, \Gamma_{\mathbb{G}}(T_A(x),t;T_A(\xi),\tau), \qquad x,\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ t,\, \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

($\mathcal{J}_{T_A}$ matrice Jacobiana di $T_A$). Per poter ottenere le stime uniformi in (1.4) è ora importante avere stime uniformi di $T_A$. Si può provare che $|\det \mathcal{J}_{T_A}(x)|$ risulta costante in $x$ e uniformemente limitato in $A$ e che $d(T_A(x), T_B(x)) \le c_\Lambda \|A - B\|^{1/r} d(x)$ per ogni $A, B \in \mathcal{M}_\Lambda$ e $x \in \mathbb{G}$. Di conseguenza (si veda [1]) se $\mathbb{G}$ è libero (1.4) segue da (2.2) e dalla seguente stima Gaussiana della (fissata) soluzione fondamentale $\Gamma_{\mathbb{G}}$

$$\left|X_{i_1} \cdots X_{i_p} (\partial_t)^q \Gamma_{\mathbb{G}}(x,t)\right| \le c_{\mathbb{G}}\, t^{-(Q+p+2q)/2} \exp\Big(-\frac{d^2(x)}{c_{\mathbb{G}}\, t}\Big).$$

Per trattare il caso di un gruppo arbitrario $\mathbb{G}$, il nostro principale strumento consiste in una tecnica di *lifting* di $\mathbb{G}$ a un gruppo libero $\widetilde{\mathbb{G}}$ in modo che $\Delta_{\mathbb{G}}$ sia "liftato" a $\Delta_{\widetilde{\mathbb{G}}}$. La tecnica di lifting introdotta da Rothschild&Stein in [24] permette di provare il seguente risultato (si veda [3]): se $\mathbb{G}$ è un $N$-dimensionale gruppo stratificato, allora esiste un $H$-dimensionale gruppo stratificato libero $\widetilde{\mathbb{G}}$ (con $H \ge N$) tale che, denotando con $\pi : \mathbb{R}^H \to \mathbb{R}^N$ la proiezione sulle prime $N$ coordinate, si ha $\widetilde{Z}_i(u \circ \pi) = (Z_i u) \circ \pi$, per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{G})$, dove $\sum_{i=1}^m Z_i^2$ e $\sum_{i=1}^m \widetilde{Z}_i^2$ sono i sub-Laplaciani canonici $\Delta_{\mathbb{G}}$ e $\Delta_{\widetilde{\mathbb{G}}}$. Poichè $\mathfrak{G}_1 = \mathrm{span}\{Z_1, \dots, Z_m\}$, il risultato di lifting ci porta a una corrispondenza fra $\mathcal{H}_A = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j} X_i X_j - \partial_t$ su $\mathbb{G} \times \mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathcal{H}}_A = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j} \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j - \partial_t$ su $\widetilde{\mathbb{G}} \times \mathbb{R}$.

Il lifting ci fornisce anche una relazione fra la soluzione fondamentale $\Gamma_A$ per $\mathcal{H}_A$ e $\widetilde{\Gamma}_A$ per $\widetilde{\mathcal{H}}_A$. Infatti si ha

$$\Gamma_A(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{H-N}} \widetilde{\Gamma}_A((x,\widehat{x}),t)\, \mathrm{d}\widehat{x}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{G},\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

dove $(x,\widehat{x})$ denota il punto di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{H-N}$. Di conseguenza riusciamo a estendere (1.4) al caso non libero.

## 3. Prova dei risultati principali

Fissiamo anzitutto qualche notazione. Il punto di $\mathbb{R}^{N+1}$ sarà denotato con $z = (x,t)$ ($x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$) e analogamente $\zeta = (\xi,\tau)$. I coefficienti $a_{i,j}$ di $\mathcal{H}$ in (1.1)

saranno assunti soddisfare

$$\big(a_{i,j}(x,t)\big)_{i,j} \in \mathcal{M}_\Lambda, \quad |a_{i,j}(x,t) - a_{i,j}(x',t')| \le L\,(d(x,x')^\alpha + |t-t'|^{\alpha/2}).$$

Si intenderà che tutte le costanti dipendano da $\Lambda$, $L$, $\alpha$. Seguendo (1.3), poniamo per brevità $\mathcal{H}_{\zeta_0} := \mathcal{H}_{A(\zeta_0)}$ (e analogamente, $\Gamma_{\zeta_0} := \Gamma_{A(\zeta_0)}$). Le stime Gaussiane discusse nel paragrafo 2 (si veda e.g., (1.4)) permettono di provare le seguenti stime della soluzione fondamentale $\Gamma_{\zeta_0}$ per gli operatori congelati $\mathcal{H}_{\zeta_0}$ (uniformi in $\zeta_0$):

(3.1)

$$c^{-1}\,\mathbf{E}(x,c^{-1}\,t) \le \Gamma_{\zeta_0}(x,t) \le c\,\mathbf{E}(x,c\,t);$$

$$\big|X_{i_1}\cdots X_{i_p}(\partial_t)^q\,\Gamma_{\zeta_0}(x,t)\big| \le c_{p,q}\,t^{-(p+2q)/2}\,\mathbf{E}(x,c\,t);$$

$$\big|X_{i_1}\cdots X_{i_p}(\partial_t)^q\,\Gamma_{\zeta_0}(x,t) - X_{i_1}\cdots X_{i_p}(\partial_t)^q\,\Gamma_{\zeta_1}(x,t)\big| \le$$
$$c_{p,q}\,\big(d(\xi_0,\xi_1)^{\frac{\alpha}{r}} + |\tau_0-\tau_1|^{\frac{\alpha}{2r}}\big)\,t^{-(p+2q)/2}\,\mathbf{E}(x,c\,t),$$

dove $\mathbf{E}(x,t) = t^{-Q/2}\exp(-d(x)^2/t)$. Osserviamo che il metodo della parametrice tracciato sotto è classico, ma varie complicazioni tecniche si aggiungono nel nostro contesto. Poniamo (per $z \ne \zeta$)

$$Z_1(z;\zeta) = \mathcal{H}\big(z \mapsto \Gamma_\zeta(\xi^{-1}\circ x, t-\tau)\big)(z).$$

Poichè $\mathcal{H} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_\zeta + \mathcal{H}_\zeta$, abbiamo $Z_1(z;\zeta) = \sum_{i,j=1}^m (a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta))\,X_iX_j\Gamma_\zeta(\xi^{-1}\circ x, t-\tau)$, per cui (3.1) dà $|Z_1(z;\zeta)| \le c\,(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\Gamma_{\zeta_0}(\xi^{-1}\circ x, c\,(t-\tau))$. Se definiamo induttivamente

$$Z_{j+1}(z;\zeta) = \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t]} Z_1(z;\eta)\,Z_j(\eta;\zeta)\,\mathrm{d}\eta \quad (t>\tau),$$

vale la stima seguente (per opportune costanti $c_1$, $c_2$, $b_j$)

$$|Z_j(z;\zeta)| \le c_1^j\,b_j(\alpha)\,(t-\tau)^{-1+j\alpha/2}\,\Gamma_{\zeta_0}(\xi^{-1}\circ x, c_2\,(t-\tau)).$$

Grazie a (3.1), si può dunque provare che laserie $\Phi(z;\zeta) = \sum_{j=1}^\infty Z_j(z;\zeta)$ converge totalmente su un opportuno dominio e soddisfa (qui $T>0$ e $c(T)>0$ è una costante)

$$|\Phi(z;\zeta)| \le c(T)\,(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,\mathbf{E}(\xi^{-1}\circ x, c\,(t-\tau)), \quad 0 < t-\tau \le T. \tag{3.2}$$

È facile vedere che (per $t>\tau$) $\Phi(z;\zeta) = Z_1(z;\zeta) + \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t]} Z_1(z;\eta)\,\Phi(\eta;\zeta)\,\mathrm{d}\eta$. Uno strumento cruciale nell'adattare il metodo della parametrice è dato dalle seguenti non banali propietà di regolarità di $\Phi$: $\Phi(\cdot;\zeta)$ e $\Phi(z;\cdot)$ sono funzioni continue e si ha (per $0 < t-\tau \le T$)

$$\begin{aligned}&|\Phi(x,t;\xi,\tau) - \Phi(x',t;\xi,\tau)| \le \\ &\quad c(T)\,d(x,x')^{\frac{\alpha}{2}}\,(t-\tau)^{\frac{\alpha}{4}-1}\,\big(\mathbf{E}(\xi^{-1}\circ x, c\,(t-\tau)) + \mathbf{E}(\xi^{-1}\circ x', c\,(t-\tau))\big).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Poniamo ora, per ogni $z$, $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $t>\tau$,

$$J(z;\zeta) = \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t]} \Gamma_\eta(z;z')\,\Phi(z';\zeta)\,\mathrm{d}z', \qquad \Gamma(z;\zeta) = J(z;\zeta) + \Gamma_\zeta(z;\zeta), \tag{3.4}$$

(estendiamo $\Gamma(z;\zeta)$ a zero per $t \le \tau$). La buona proprietà (3.2) di $\Phi$ e le stime Gaussiane (3.1) assicurano che $\Gamma$ è ben posta. Usando di nuovo le stime (3.1) e (3.2), bon è difficile vedere che $\Gamma$ è continua fuori dalla diagonale di $\mathbb{R}^{N+1}\times\mathbb{R}^{N+1}$ e soddisfa

$$|\Gamma(z;\zeta)| \le c(T)\,\mathbf{E}(\xi^{-1}\circ x, c(t-\tau)) \qquad (0 < t-\tau \le T).$$

Mostriamo ora che $\Gamma$ è la soluzione fondamentale per $\mathcal{H}$. Il primo passo è di provare che $\mathcal{H}(\Gamma(\cdot;\zeta)) = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\zeta\}$. Iniziamo dando la definizione di una classe di regolarità intrinseca che sarà utile nel seguito: dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, denotiamo con $\mathfrak{C}^2(\Omega)$ la classe di funzioni $u(x,t)$ definite su $\Omega$ che sono continue in $\Omega$ rispetto alla coppia $(x,t)$ e tali che $u(\cdot,t)$ ha derivate di Lie continue (rispetto a $x$, per ogni fissato $t$) fino al secondo ordine lungo i campi vettoriali $X_1,\dots,X_m$ e $u(x,\cdot)$ ha derivata continua (rispetto a $t$, per ogni fissato $x$), nei loro rispettivi domini di definizione. La classe $\mathfrak{C}^2(\Omega)$ è più grande dello spazio naturale $\Gamma^2(\Omega)$ (delle funzioni continue $u$ con derivate continue $X_iu$, $X_iX_ju$, $\partial_t u$); ciò nonostante siamo in grado di provare un principio di massimo debole per soluzioni di $\mathcal{H}u \geq 0$ nella classe $\mathfrak{C}^2(\Omega)$, come enunciato sotto.

**Proposizione 3.1.** *Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$; se $u \in \mathfrak{C}^2(\Omega)$, $\mathcal{H}u \geq 0$ in $\Omega \cap \{t < t_0\}$ e $\limsup u \leq 0$ in $\partial\Omega \cap \{t \leq t_0\}$, allora $u \leq 0$ in $\Omega \cap \{t < t_0\}$.*

Con la notazione sopra siamo in grado di provare il seguente risultato

**Proposizione 3.2.** *per ogni fissato $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, abbiamo $\Gamma(\cdot;\zeta) \in \mathfrak{C}^2(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\zeta\})$ e $\mathcal{H}(\Gamma(\cdot;\zeta)) = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{\zeta\}$. Inoltre, la stima in (1.2) vale.*

Il principale strumento nello prova della proposizione sopra è la rappresentazione delle derivate di Lie della convoluzione (3.4) che definisce $J$ come integrali valor principale. Infatti abbiamo

$$X_iX_j\big(J(\cdot;\zeta)\big)(z) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t-\varepsilon]} X_iX_j\Gamma_{z'}(x'^{-1}\circ x, t-t')\,\Phi(z';\zeta)\,\mathrm{d}z',$$
$$\partial_t\big(J(\cdot;\zeta)\big)(z) = \Phi(z;\zeta) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t-\varepsilon]} \partial_t\Gamma_{z'}(x'^{-1}\circ x, t-t')\,\Phi(z';\zeta)\,\mathrm{d}z'.$$

La prova di questo fatto non è immediata; uno dei principali ingredienti sono le stime Hölderiane di$\Phi$ in (3.3). È ora facile vedere che

$$\mathcal{H}\big(\Gamma(\cdot;\zeta)\big)(z) = \mathcal{H}\big(\Gamma_\zeta(\cdot;\zeta)\big)(z) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t-\varepsilon]} \mathcal{H}\big(\Gamma_\eta(\cdot;z')\big)(z)\,\Phi(z';\zeta)\,\mathrm{d}z'$$
$$-\Phi(z;\zeta) = Z_1(z;\zeta) + \int_{\mathbb{R}^N\times[\tau,t]} Z_1(z;\eta)\,\Phi(\eta;\zeta)\,\mathrm{d}\eta - \Phi(z;\zeta) = 0.$$

Evitiamo di dare i dettagli sui risultati (iii) e (iv) del Teorema 1.1 concernente il problema di Cauchy per $\mathcal{H}$.

Passiamo ora studiare l'operatore $\mathcal{L} = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\,X_iX_j$. Partendo dal Teorema 1.1, si può costruire una soluzione fondamentale locale per $\mathcal{L}$, integrando $\Gamma$ nella variabile temporale $t$, a patto che si possano stabilire opportune stime per *tempi grandi* di $\Gamma$. Siamo in grado di trovare delle stime sufficienti se la dimensione $m$ del primo strato $\mathfrak{G}_1$ nella stratificazione di $g$ è strettamente più grande di due. Infatti, possiamo provare il seguente lemma tecnico.

**Lemma 3.3.** *Sia $\Omega$ un dominio limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$. A meno di modificare i coefficienti $a_{i,j}(x,t)$ di $\mathcal{H}$ fuori da $\Omega$, $\Gamma$ soddisfa la seguente stima : per ogni insieme compatto $K \Subset \mathbb{R}^m$, esistono costanti positive $c$, $M$ tali che*

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) \leq c\,(M+t-\tau)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{\Lambda\,|x^{(1)}-\xi^{(1)}|^2}{M+t-\tau}\Big)$$

*(per $t > \tau+1$ e $\xi^{(1)} \in K$). Abbiamo denotato con $x^{(1)}$ il vettore delle prime $m$ coordinate di $x$.*

La prova del Lemma 3.3 si basa sul principio di massimo per $\mathcal{H}$ nella classe $\mathfrak{C}^2$ (si veda la Proposizione 3.1) e su un argomento di confronto. La stima per tempi grandi di $\Gamma$ di cui sopra è certamente non ottimale, ma è sufficiente per assicurare la convergenza dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} \Gamma(x,t;\xi,0)\,dt$ (per $x \neq \xi$) se $m > 2$. Questo permette di ottenere il Teorema 1.2 ragionando come segue.

Fissiamo una funzione cut-off $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi \equiv 1$ in $\Omega$. Definiamo ora una opportuna "$\mathbb{G}$-regolarizzazione" $A^\varepsilon = (a^\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ dei coefficienti $a_{i,j}$ di $\mathcal{L}$ e poniamo

$$\widetilde{A}^\varepsilon(x) = \varphi(x)\,A^\varepsilon(x) + \big(1-\varphi(x)\big)\,(4\,\Lambda)^{-1}\,\mathbb{I}_m$$

(dove $\mathbb{I}_m$ denota la matrice identità $m \times m$) e

$$\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon = \widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon - \partial_t = \textstyle\sum_{i,j=1}^m \widetilde{a}^\varepsilon_{i,j}(x)\,X_iX_j - \partial_t.$$

I coefficienti sono stati opportunamente modificati fuori da $\Omega$ in modo che possiamo applicare il Lemma 3.3 e avere che l'integrale

$$\widetilde{\gamma}^\varepsilon(x,\xi) = \textstyle\int_0^\infty \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(x,t;\xi,0)\,\mathrm{d}t, \quad x \neq \xi \in \mathbb{R}^N$$

è convergente. Inoltre, poichè l'operatore approssimante $\widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon$ ha coefficienti regolari, si può provare che $\widetilde{\gamma}^\varepsilon$ è la soluzione fondamentale per $\widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon$ usando la buona positura degli operatori aggiunti $(\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)^*$ e $(\widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)^*$. Infatti, per ogni funzione test $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ponendo $\psi_n(x,t) = \psi(x)\,\theta(|t|/n)$ (dove $\theta$ è una funzione regolare definita su $\mathbb{R}$, tale che $\theta(s) = 1$ per $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ per $s \geq 1$) otteniamo

$$\begin{aligned} -\psi(\xi) = -\psi_n(\xi,0) &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(x,t;\xi,0)\,(\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)^*\psi_n(x,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \textstyle\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(x,t;\xi,0)\,(\widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)^*\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\gamma}^\varepsilon(x,\xi)\,(\widetilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)^*\psi(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Infine troviamo la soluzione fondamentale $\widetilde{\gamma}$ di

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \textstyle\sum_{i,j=1}^m \widetilde{a}_{i,j}(x)X_iX_j$$

(dove $\widetilde{A} = \varphi A + (1-\varphi)(4\Lambda)^{-1}\mathbb{I}_m$), con un argomento di approssimazione, mandando $\varepsilon$ a zero in $\widetilde{\gamma}^\varepsilon$. Questo argomento di approssimazione è non banale e richiede opportune stime a priori di tipo Schauder e una accurata analisi della dipendenza da $\varepsilon$ nella costruzione di $\widetilde{\Gamma}^\varepsilon$. Omettiamo i dettagli. Infine, osservando che $\mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$ in $\Omega$, siamo in grado di provare il Teorema 1.2.

## References


[1] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F., *Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups*, Adv. Differential Equations **7** (2002), 1153–1192

[2] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F., *Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[3] Bonfiglioli, A., Uguzzoni, F., *A note on lifting of Carnot groups*, preprint

[4] Bonfiglioli, A., Uguzzoni, F., *Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups*, to appear in Forum Math.

[5] Bramanti, M., Brandolini, L., *$L^p$ estimates for nonvariational hypoelliptic operators with VMO coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 2, 781–822

[6] Capogna, L., *Regularity for quasilinear equations and 1-quasiconformal maps in Carnot groups*, Math. Ann. **313** (1999), no. 2, 263–295

[7] Capogna, L., Danielli, D., Garofalo, N., *Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 6, 1153–1196

[8] CAPOGNA, L., HAN, Q., *Pointwise Schauder estimates for second order linear equations in Carnot groups*, preprint

[9] G. CITTI, N. GAROFALO, E. LANCONELLI, *Harnack's inequality for sum of squares of vector fields plus a potential*, Amer. J. Math. **115** (1993), 699–734.

[10] CITTI, G., LANCONELLI, E., MONTANARI, A., *Smoothness of Lipschitz continuous graphs with nonvanishing Levi curvature*, Acta Math. **188** (2002), 87–128

[11] FOLLAND, G. B., *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. **13** (1975), 161–207

[12] FRANCHI, B., LU, G., WHEEDEN, R. L., *Weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields and local regularity for a class of degenerate elliptic equations*, Potential Anal. **4** (1995), 361–375

[13] HÖRMANDER, L., *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171

[14] HUISKEN, G., KLINGENBERG, W., *Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form*, Math. Res. Lett. **6** (1999), 645–661

[15] JERISON, D., LEE, J. M., *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), 167–197

[16] JERISON, D., SÁNCHEZ-CALLE, A., *Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields*, Indiana Univ. Math. J. **35** no. 4, (1986), 835–854

[17] KUSUOKA, S., STROOCK, D., *Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator*, Ann. of Math. **127** (1988), 165–189

[18] LANCONELLI, E., PASCUCCI, A., POLIDORO, S., *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance* Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics, II, in Honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya, International Mathematical Series, **2**, to appear

[19] LU, G., *Existence and size estimates for the Green's functions of differential operators constructed from degenerate vector fields*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1213–1251

[20] MONTANARI, A., *Real hypersurfaces evolving by Levi curvature: smooth regularity of solutions to the parabolic Levi equation*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 1633–1664

[21] MONTGOMERY, R., *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications* Mathematical Surveys and Monographs **91**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002

[22] PETITOT, J., TONDUT, Y., *Vers une neurogéométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux*, Math. Inform. Sci. Humaines **145** (1999), 5–101

[23] POLIDORO, S., *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Matematiche (Catania) **49** (1994), 53–105

[24] ROTHSCHILD, L. P., STEIN, E. M., *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247–320

[25] SLODKOWSKI, Z., TOMASSINI, G., *Weak solutions for the Levi equation and envelope of holomorphy*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 392–407

[26] VAROPOULOS, N. T., SALOFF-COSTE, L., COULHON, T., *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics **100**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[27] XU, C. J., *Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 77–96